1 Ángulos en las figuras planas

Página 139

1. Cinco de los ángulos de un hexágono irregular miden 147°, 101°, 93°, 122° y 134°. Halla la medida del sexto ángulo.

Los seis ángulos de un hexágono suman: $(6 - 2) \cdot 180° = 4 \cdot 180° = 720°$

$720° - (147° + 101° + 93° + 122° + 134°) = 720° - 597° = 123°$

El sexto ángulo mide 123°.

2. ¿Cuánto mide cada ángulo de un hexágono regular? ¿Y de un pentágono regular?

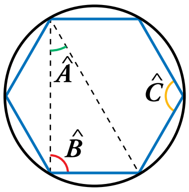
– La suma de los ángulos de un hexágono es $(6 - 2) \cdot 180° = 4 \cdot 180° = 720°$.

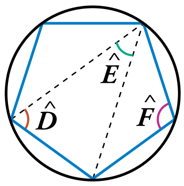
Por tanto, cada ángulo mide $720° : 6 = 120°$.

– La suma de los ángulos de un pentágono es $(5 - 2) \cdot 180° = 3 \cdot 180° = 540°$.

Entonces, cada ángulo de un pentágono regular mide $540° : 5 = 108°$.

3. Halla el valor de cada uno de los ángulos señalados:





$\hat{A}$ es un ángulo inscrito cuyo central correspondiente mide $\frac{360°}{6} = 60° \rightarrow \hat{A} = \frac{60°}{2} = 30°$

$\hat{B}$ es un ángulo inscrito cuyo central correspondiente mide $180° \rightarrow \hat{B} = \frac{180°}{2} = 90°$

$\hat{C}$ es uno de los ángulos del hexágono $\rightarrow \hat{C} = \frac{(6-2)\,180°}{6} = 120°$

$\hat{D}$ es un ángulo inscrito cuyo central correspondiente mide $2 \cdot \frac{360°}{5} = 144° \rightarrow \hat{D} = \frac{144°}{2} = 72°$

$\hat{E}$ es un ángulo inscrito cuyo central correspondiente mide $\frac{360°}{5} = 72° \rightarrow \hat{E} = \frac{72°}{2} = 36°$

$\hat{F}$ es uno de los ángulos del pentágono $\rightarrow \hat{F} = \frac{(5-2)\,180°}{5} = 108°$

2 Figuras semejantes

Página 140

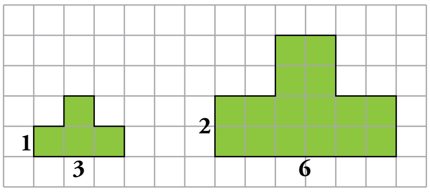
1. Estas dos figuras son semejantes. Mide y encuentra la razón de semejanza.

Por ejemplo, medimos las guitarras a lo largo del mástil. Entonces, la guitarra de mayor tamaño mide, aproximadamente, 4 cm y la de menor tamaño mide 3 cm aproximadamente.

$4 \cdot 0{,}75 = 3$

Por tanto, la razón de semejanza es r ≈ 0,75.

2. Estas dos figuras son semejantes y su razón de semejanza es 2:



¿Cuántos cuadrados ocupa la primera? ¿Y la segunda? ¿Cuál es la razón entre las áreas?

La primera figura ocupa 4 cuadrados.

La segunda figura ocupa 16 cuadrados.

La razón entre las áreas es: $r = \dfrac{16}{4} = 4$.

3 Planos, mapas y escala

Página 141

1. Considera el plano del primer ejemplo.

a) Calcula la anchura de la vivienda.

b) ¿Cuánto mediría esa misma longitud en un plano construido a escala 1/100?

a) En la imagen, el ancho mide 4,9 cm.

La anchura de la vivienda mide $4{,}9 \cdot 200 = 980$ cm $= 9{,}8$ m.

b) A escala 1/100, la anchura de la vivienda medirá, $4{,}9 \cdot 100 = 490$ cm $= 4{,}9$ m.

2. a) Calcula la distancia real entre Arrecife de Lanzarote y Las Palmas de Gran Canaria.

b) ¿A qué escala debería estar el plano para que esa distancia, sobre el papel, fuera el doble?

a) En la imagen, la distancia entre el Arrecife y Las Palmas de Gran Canaria es 4,1 cm.

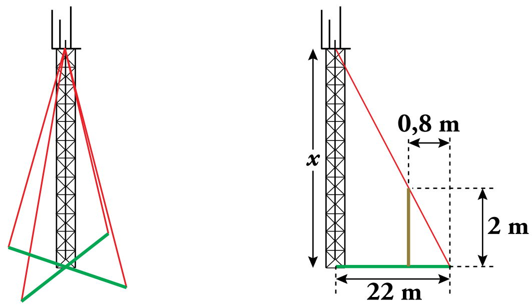
Por tanto, la dimensión real es $4{,}1 \cdot 5\,000\,000 = 20\,500\,000$ cm $= 205$ km.

b) Para que la distancia fuera el doble, el plano debería estar a una escala 1/2 500 000.

4 Triángulos semejantes. Teorema de Tales

Página 143

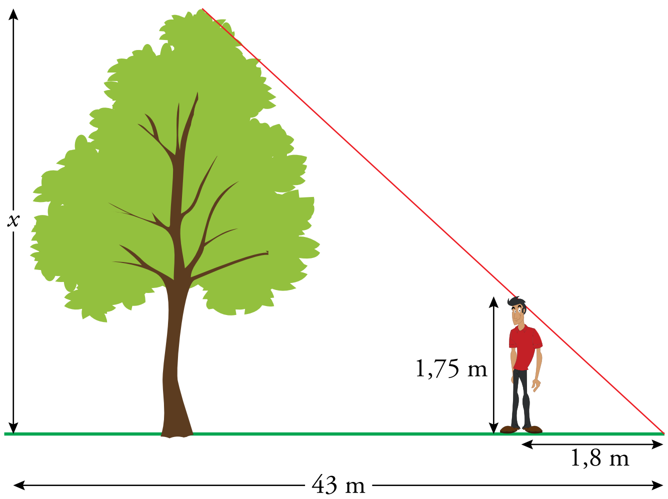
1. **Una torre de comunicaciones se sustenta por cuatro cables amarrados a su extremo superior y al suelo. Para calcular su altura, Aurora ha colocado un listón de dos metros como indica la figura. Con esos datos, calcula tú la altura de la torre.**



$$\frac{2}{0,8} = \frac{x}{22} \rightarrow x = \frac{2 \cdot 22}{0,8} = 55 \text{ m}$$

La altura de la torre mide 55 m.

2. **Cuando mi sombra mide 1,8 m, la del pino del parque mide 43 m. Mi altura es 1,75 m. ¿Cuál es la altura del pino?**

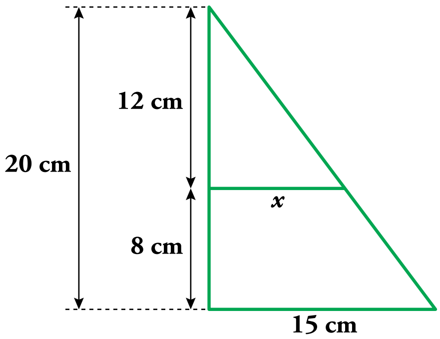


$$\frac{1,75}{1,8} = \frac{x}{43}$$

$$x = \frac{1,75 \cdot 73}{1,8} = 41,81 \text{ m}$$

El pino mide 41,81 m.

3. **La altura de un cono recto mide 20 cm, y el radio de la base, 15 cm. ¿Cuál es el radio de la nueva base, si se corta de forma que su altura disminuya en 8 cm?**



$$\frac{x}{15}=\frac{12}{20}$$

$$x=\frac{12\cdot 15}{20}=9\text{ cm}$$

El radio de la nueva base mide 9 cm.

4. **Calcula la diagonal de un pentágono regular de 8 cm de lado.**

Observa en la figura que los dos triángulos verdes son iguales, y que los dos azules son semejantes.

$$\frac{8+d}{d}=\frac{d}{8}\ \rightarrow\ 8(8+d)=d\cdot d\ \rightarrow\ 64+8d=d^2\ \rightarrow\ d^2-8d-64=0$$

$$d=\frac{-(-8)\pm\sqrt{(-8)^2-4\cdot 1\cdot(-64)}}{2\cdot 1}=\frac{8\pm\sqrt{64+256}}{2}=\frac{8\pm\sqrt{320}}{2}=\frac{8\pm 8\sqrt{5}}{2}\text{ cm}\ \begin{cases}4+4\sqrt{5}\approx 12,94\text{ cm}\\ 4-4\sqrt{5}\approx -4,94\text{ cm}\end{cases}$$

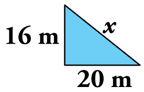
Solución: La diagonal mide $4+4\sqrt{5}\approx 12,94$ cm.

5 El teorema de Pitágoras

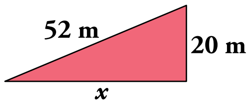
Página 145

1. Calcula el lado desconocido en cada triángulo:

a)



b)



a) $x^2 = 20^2 + 16^2 \rightarrow x = \sqrt{400 + 256} = \sqrt{656} = 4\sqrt{41} \approx 25{,}6$ m.

b) $52^2 = 20^2 + x^2 \rightarrow x^2 = 52^2 - 20^2$

$x = \sqrt{2\,704 - 400} = \sqrt{2\,304} = 48$ m

2. Averigua cómo son (acutángulos, rectángulos u obtusángulos) los triángulos de lados:

a) 49 m, 18 m y 52 m

b) 44 cm, 17 cm y 39 cm

c) 68 cm, 85 dm, 51 cm

d) 15 cm, 15 cm, 15 cm

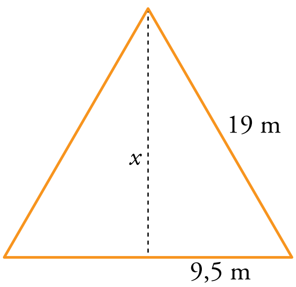
a) $18^2 + 49^2 = 2\,725 > 2\,704 = 52^2 \rightarrow$ Triángulo acutángulo.

b) $17^2 + 39^2 = 1\,810 < 1\,936 = 44^2 \rightarrow$ Triángulo obtusángulo.

c) $68^2 + 51^2 = 7\,225 = 85^2 \rightarrow$ Triángulo rectángulo.

d) $15^2 + 15^2 = 450 > 225 = 15^2 \rightarrow$ Triángulo acutángulo.

3. Halla la altura de un triángulo equilátero de 19 m de lado. Da la solución aproximando hasta los centímetros.

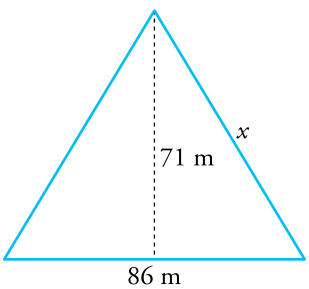


$19^2 = x^2 + 9{,}5^2 \rightarrow x^2 = 19^2 - 9{,}5^2$

$x = \sqrt{361 - 90{,}25} = \sqrt{270{,}75} \approx 16{,}45$ m

Solución: La altura mide 16,45 m.

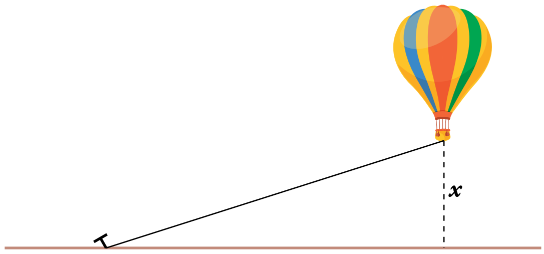
4. Halla el perímetro de un triángulo isósceles de lado desigual 86 m y altura correspondiente 71 m.

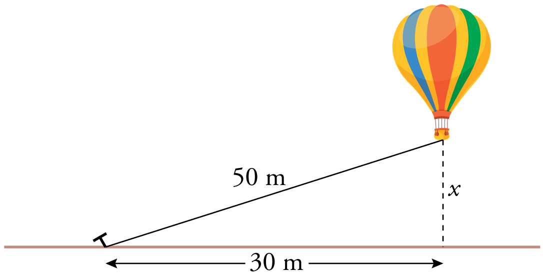


$x^2 = 71^2 + 43^2 \rightarrow x = \sqrt{6\,890} = 83{,}01$ m

$P = 2 \cdot 83{,}01 + 86 = 252{,}02$ m

5. Un globo cautivo, amarrado al suelo con una cuerda de 50 metros, ha sido desplazado por el viento 30 metros hacia el oeste. ¿A qué altura se encuentra?



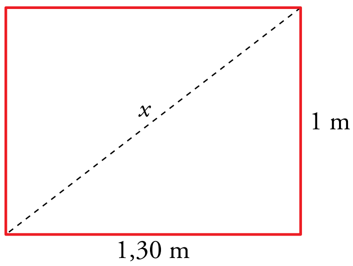


$50^2 = 30^2 + x^2 \rightarrow x^2 = 50^2 - 30^2$

$x = \sqrt{2\,500 - 900} = \sqrt{1\,600} = 40$ m

Solución: Se encuentra a 40 m de altura.

6. ¿Será posible introducir, durante una mudanza, el tablero de una mesa de 1,5 × 2 metros, a través del hueco de una ventana de 1 × 1,30 metros? Razona tu respuesta.



$x^2 = 1{,}30^2 + 1^2 \rightarrow x = \sqrt{1{,}69 + 1} = \sqrt{2{,}69}$

$x = 1{,}64$ m

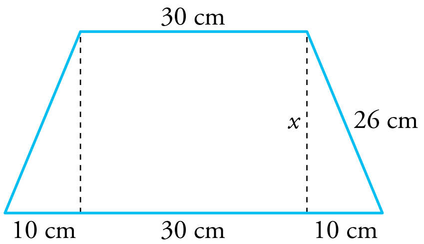
$1{,}5 < 1{,}64$

Solución: Sí, será posible. El ancho de la mesa es 1,5 m y la diagonal de la ventana mide 1,64 m.

6 Triángulos rectángulos en figuras planas

Página 147

1. Los lados de un trapecio isósceles miden 50 cm, 30 cm, 26 cm y 26 cm. Halla su altura.

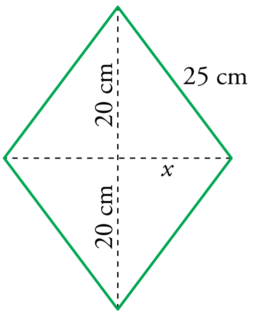


$26^2 = x^2 + 10^2 \rightarrow x^2 = 26^2 - 10^2$

$x = \sqrt{576} = 24$ cm

La altura del trapecio isósceles es 24 cm.

2. Cada uno de los lados de un rombo miden 25 cm, y una de sus diagonales, 40 cm. Halla la longitud de la otra diagonal.

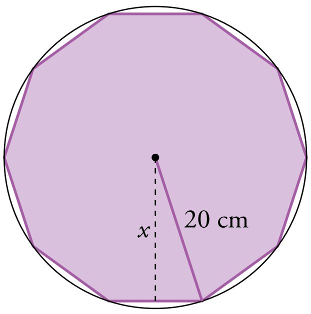


$25^2 = x^2 + 20^2 \rightarrow x^2 = 25^2 - 20^2$

$x = \sqrt{225} = 15$ cm

La longitud de la otra diagonal es $15 \cdot 2 = 30$ cm.

3. El perímetro de un decágono regular inscrito en una circunferencia de 20 cm de radio mide 124,9 cm. Halla su apotema.



Perímetro = 124,9 cm

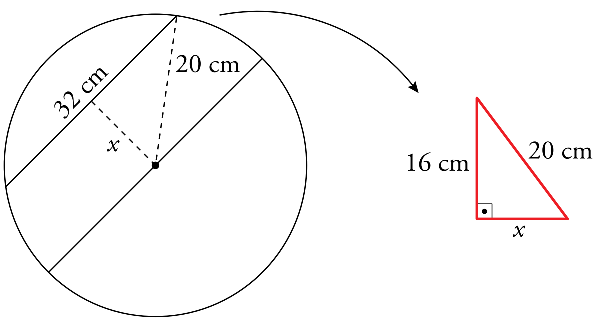
Cada lado del decágono mide 124,9 : 10 = 12,49 cm

$20^2 = x^2 + \left(\frac{12,49}{2}\right)^2 \rightarrow x^2 = 20^2 - 6,245^2$

$x \approx \sqrt{400 - 39} \approx \sqrt{361} \approx 19$ cm

La apotema mide, aproximadamente, 19 cm.

4. En una circunferencia hemos dibujado un diámetro de 40 cm y una cuerda paralela a él de 32 cm. ¿A qué distancia están estos dos segmentos?

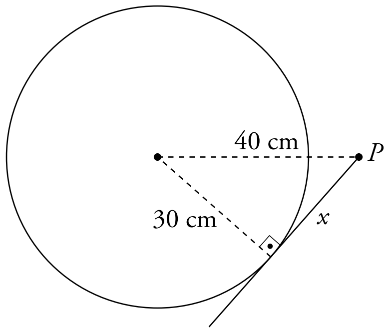


$20^2 = 16^2 + x^2 \rightarrow x^2 = 20^2 - 16^2$

$x = \sqrt{400 - 256} = \sqrt{144} = 12$ cm

Solución: Están a 12 cm de distancia.

5. **Desde un punto que dista 40 cm del centro de una circunferencia de 60 cm de diámetro, hemos trazado un segmento tangente a ella. ¿Cuál es su longitud?**

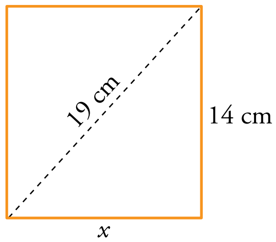


$40^2 = 30^2 + x^2 \rightarrow x^2 = 40^2 - 30^2$

$x = \sqrt{1\,600 - 900} = \sqrt{700} = 10\sqrt{7} = 26,46 \text{ cm}$

Solución: El segmento mide 26,46 cm.

6. **Halla el perímetro de un rectángulo cuya diagonal mide 19 cm, y su lado menor, 14 cm.**



$19^2 = 14^2 + x^2 \rightarrow x^2 = 19^2 - 14^2$

$x = \sqrt{361 - 196} = \sqrt{165} = 12,85 \text{ cm}$

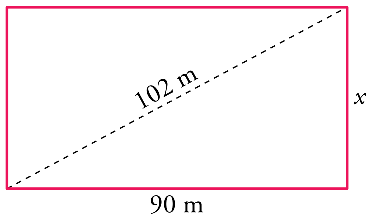
$P = 2 \cdot 14 + 2 \cdot 12,85 = 53,7$ cm

Solución: El perímetro mide 53,7 cm.

7 Áreas de los polígonos

Página 149

1. Un estadio rectangular mide 90 metros de largo, y su diagonal, 102 m. Halla su anchura y su área.



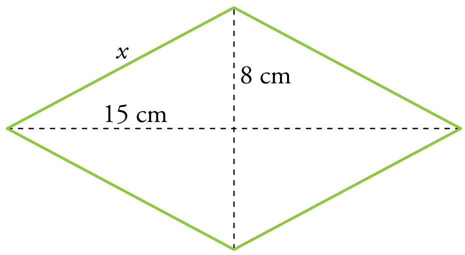
$102^2 = 90^2 + x^2 \rightarrow x^2 = 102^2 - 90^2$

$x = \sqrt{10\,404 - 8\,100} = \sqrt{2\,304} = 48$ m

Área = $90 \cdot 48 = 4\,320$ m^2

Solución: El estadio mide 48 m de ancho y su área es de 4 320 m^2.

2. Las diagonales de un rombo miden 16 cm y 30 cm, respectivamente. Halla el perímetro y el área del rombo.



$x^2 = 15^2 + 8^2 \rightarrow x = \sqrt{225 + 64} = \sqrt{289} = 17$ cm.

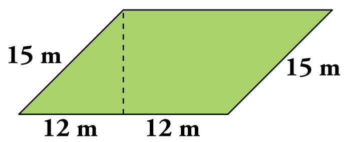
Perímetro = $4 \cdot 17 = 68$ cm

Área = $\dfrac{30 \cdot 16}{2} = 240$ cm^2

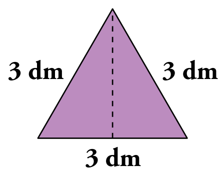
El perímetro mide 68 cm y el área, 240 cm^2.

3. Halla el área y el perímetro de las siguientes figuras, calculando previamente el elemento que falta:

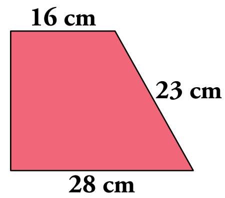
a)



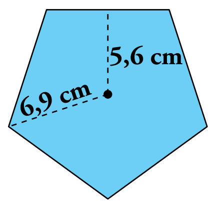
b)



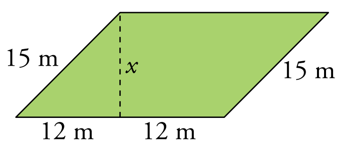
c)



d)



a) Calculamos la altura:



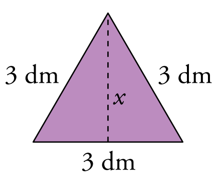
$15^2 = 12^2 + x^2 \rightarrow x^2 = 15^2 - 12^2$

$x = \sqrt{225 - 144} = \sqrt{81} = 9$ m

Área = $9 \cdot (12 + 12) = 9 \cdot 24 = 216$ m^2

Perímetro = $15 \cdot 2 + 24 \cdot 2 = 78$ m

b) Calculamos la altura:



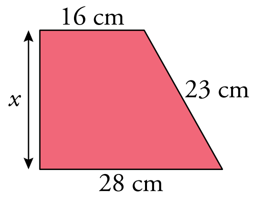
$3^2 = 1{,}5^2 + x^2 \rightarrow x^2 = 3^2 - 1{,}5^2$

$x = \sqrt{9 - 2{,}25} = \sqrt{6{,}75} = 2{,}6$ dm

Área = $\dfrac{3 \cdot 2{,}6}{2} = 3{,}9$ dm^2

Perímetro = $3 \cdot 3 = 9$ dm

c)



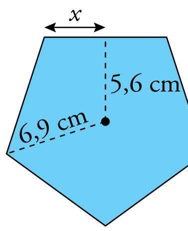
$23^2 = x^2 + 12^2 \rightarrow x^2 = 23^2 - 12^2$

$x = \sqrt{529 - 144} = \sqrt{385} = 19,6 \text{ cm}$

$\text{Área} = \dfrac{16 + 28}{2} \cdot 19,6 = 431,2 \text{ cm}^2$

Perímetro = 19,6 + 28 + 23 + 16 = 86,6 cm

d)



$6,9^2 = 5,6^2 + x^2 \rightarrow x^2 = 6,9^2 - 5,6^2$

$x = \sqrt{47,61 - 31,36} = \sqrt{16,25} \approx 4 \text{ cm} \rightarrow \text{lado} \approx 8 \text{ cm}$

$\text{Área} = \dfrac{(5 \cdot 8) \cdot 5,6}{2} = 112 \text{ cm}^2$

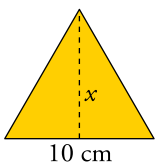
Perímetro = 5 · 8 = 40 cm

4. Calcula:

a) El área de un triángulo equilátero de lado 10 cm.

b) El área de un hexágono regular de lado 10 cm.

a)

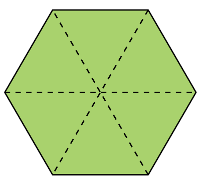


$10^2 = 5^2 + x^2 \rightarrow x^2 = 10^2 - 5^2$

$x = \sqrt{100 - 25} = \sqrt{75} \approx 8,66 \text{ cm}$

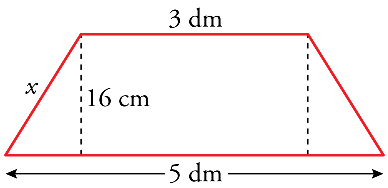
$\text{Área} = \dfrac{10 \cdot 8,66}{2} = 43,3 \text{ cm}^2$

b) El hexágono regular está formado por seis triángulos como el del apartado a).



Área = 6 · 43,3 = 259,8 cm^2

5. La altura de un trapecio isósceles mide 16 cm, y sus bases, 5 dm y 3 dm. Halla el perímetro (aproximando a los milímetros) y el área.



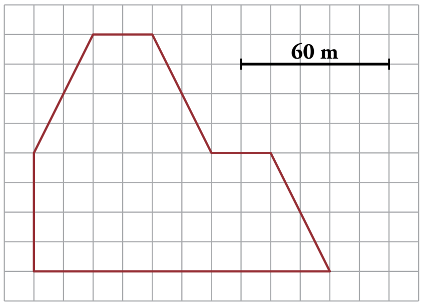
$x^2 = 16^2 + 10^2 \rightarrow x = \sqrt{256 + 100} = \sqrt{356} = 18,9 \text{ cm}$

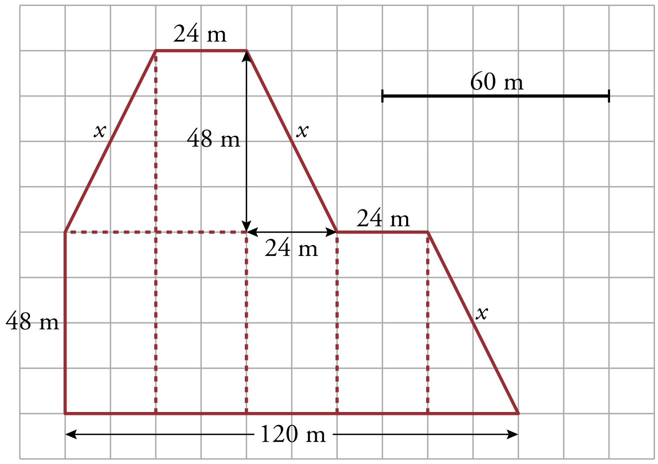
Perímetro = 30 + 50 + 2 · 18,9 = 117,8 cm

$\text{Área} = \dfrac{30 + 50}{2} \cdot 16 = 640 \text{ cm}^2$

Solución: El perímetro mide 117,8 cm y el área, 640 cm^2.

6. En la figura puedes ver el plano de una parcela de terreno. Calcula su superficie y la longitud de la valla.





Cinco cuadraditos son 60 m, entonces, un cuadradito son 12 m.

$x^2 = 24^2 + 48^2 \;\rightarrow\; x = \sqrt{576 + 2\,304} = \sqrt{2\,880} = 53,67 \text{ m}$

Hemos dividido la parcela en rectángulos y triángulos y hemos obtenido 5 rectángulos y 3 triángulos, con las mismas medidas, respectivamente.

Área de un rectángulo = $24 \cdot 48 = 1\,152 \text{ m}^2$

Área de un triángulo = $\dfrac{24 \cdot 48}{2} = 576 \text{ m}^2$

Área total = $5 \cdot 1\,152 + 3 \cdot 576 = 7\,488 \text{ m}^2$

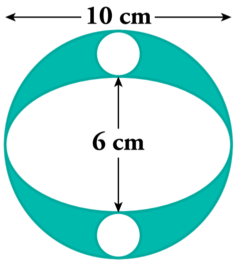
Perímetro = $120 + 48 + 3 \cdot 53{,}67 + 2 \cdot 24 \approx 377$ m

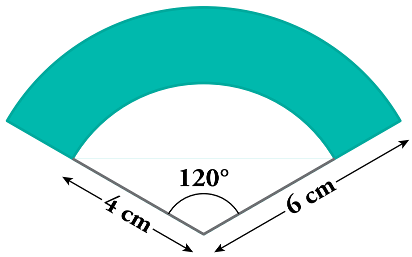
Solución: La superficie de la parcela es de 7 488 m^2 y la longitud de la valla, 377 m.

8 Áreas y perímetros de algunas figuras curvas

Página 150

1. Halla el área de las figuras coloreadas.





a) Área del círculo grande = $\pi \cdot 5^2 = \pi \cdot 25 = 78{,}54 \text{ cm}^2$

Área del círculo pequeño = $\pi \cdot 1^2 = 3{,}14 \text{ cm}^2$

Área de la elipse = $\pi \cdot 3 \cdot 5 = 47{,}12 \text{ cm}^2$

Área = $78{,}54 - 3{,}14 - 47{,}12 = 28{,}28 \text{ cm}^2$

b) Área = $\dfrac{\pi \cdot 6^2 \cdot 120°}{360°} - \dfrac{\pi \cdot 4^2 \cdot 120°}{360°} = \dfrac{\pi(36-16)}{3} = 20{,}94 \text{ cm}^2$

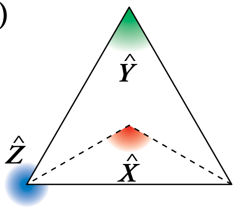
Ejercicios y problemas

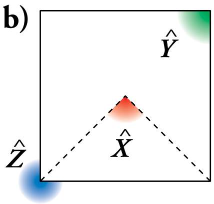
Página 151

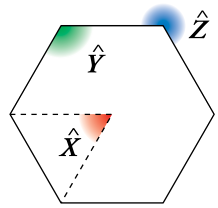
Practica

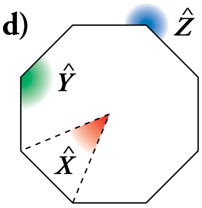
Ángulos

1. **Calcula los ángulos $\hat{X}$, $\hat{Y}$, $\hat{Z}$ en los siguientes polígonos regulares:**

a)


b)


c)


d)


a) $\hat{X} = 360° : 3 = 120°$

$\hat{Y}$ es un ángulo del triángulo equilátero. $\hat{Y} = 60°$

$\hat{Z} = 360° - 60° = 300°$

b) $\hat{X} = 360° : 4 = 90°$

$\hat{Y}$ es un ángulo del cuadrado. $\hat{Y} = 90°$

$\hat{Z} = 360° - 90° = 270°$

c) $\hat{X} = 360° : 6 = 60°$

$$\hat{Y} = \frac{(6-2) \cdot 180°}{6} = 4 \cdot 30° = 120°$$

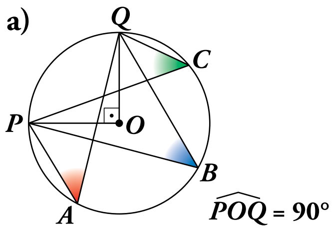
$\hat{Z} = 360° - 120° = 240°$

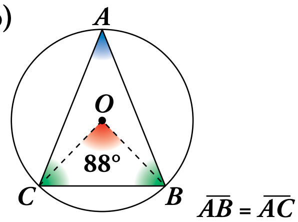
d) $\hat{X} = 360° : 8 = 45°$

$$\hat{Y} = \frac{(8-2) \cdot 180°}{8} = 135°$$

$\hat{Z} = 360° - 135° = 225°$

2. **¿Cuánto miden los ángulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ y $\hat{C}$ en cada una de estas figuras?**

a)


b)


a) $\hat{A}$, $\hat{B}$ y $\hat{C}$ son ángulos inscritos cuyo central correspondiente es $\widehat{POQ} = 90°$.

Entonces $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \dfrac{90°}{2} = 45°$

b) $\hat{A}$ es un ángulo inscrito cuyo central correspondiente es $\widehat{BOC} = 88°$.

$\hat{A} = 88° : 2 = 44°$

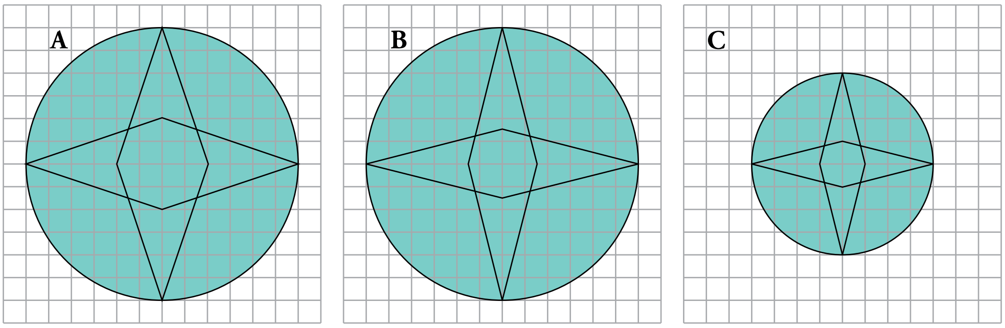
$\hat{A}$, $\hat{B}$ y $\hat{C}$ suman 180° y $\hat{B} = \hat{C}$.

$(180° - 44°) : 2 = 136° : 2 = 68°$

$\hat{A} = 44°$, $\hat{B} = \hat{C} = 68°$

Semejanza

3. **Dos de estas figuras son semejantes. ¿Cuáles?**

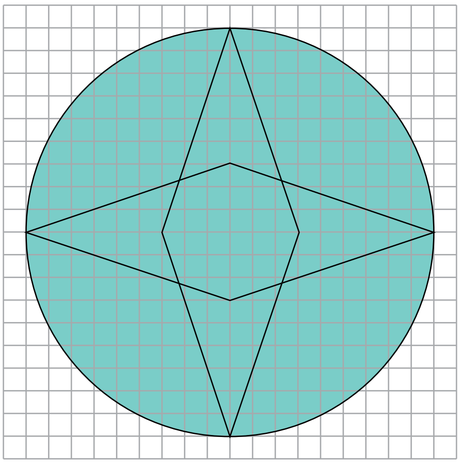


¿Cuál es la razón de semejanza?

Dibuja una figura semejante a la figura A anterior, de forma que la razón de semejanza sea 3/2.

Las figuras B y C son semejantes. Su razón de semejanza es $r = \frac{2}{3}$

Para dibujar la figura semejante a A, multiplico cada medida por $\frac{3}{2}$



4. **Debajo tienes el plano de un piso a escala 1/250. Calcula sus dimensiones (largo y ancho), y su superficie.**

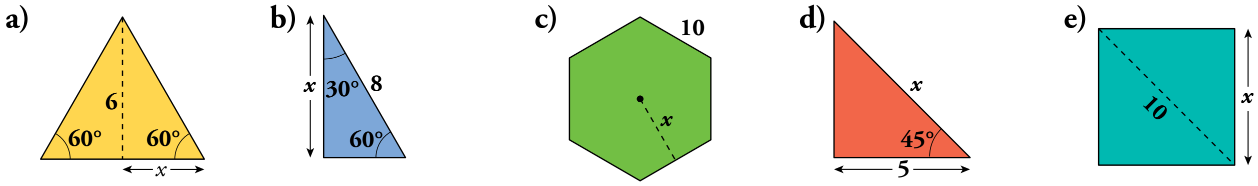
Ancho $\rightarrow$ 3,7 cm · 250 = 925 cm = 9,25 m

Largo $\rightarrow$ 7 · 250 = 1 750 cm = 17,5 m

Área = 9,25 · 17,5 = 161,875 m^2

Teorema de Pitágoras

5. **Calcula x en cada caso:**



a) $(2x^2) = x^2 + 6^2 \rightarrow 4x^2 = x^2 + 36 \rightarrow 4x^2 - x^2 = 36$

$3x^2 = 36 \rightarrow x^2 = \dfrac{36}{3} \rightarrow x^2 = 12 \rightarrow x = 2\sqrt{3} = 3,46$

b) $8^2 = x^2 + 4^2 \rightarrow 64 = x^2 + 16 \rightarrow x^2 = 64 - 16 \rightarrow x^2 = 48$

$x = \sqrt{48} \rightarrow x = 4\sqrt{3} = 6,93$

c) $10^2 = x^2 + 5^2 \rightarrow 100 = x^2 + 25 \rightarrow x^2 = 100 - 25 \rightarrow x^2 = 75$

$x = \sqrt{75} \rightarrow x = 5\sqrt{3} = 8,66$

d) $x^2 = 5^2 + 5^2 \rightarrow x^2 = 25 + 25 \rightarrow x^2 = 50$

$x = \sqrt{50} \rightarrow x = 5\sqrt{2} = 7,07$

d) $x^2 + x^2 = 10^2 \rightarrow 2x^2 = 100 \rightarrow x^2 = 50$

$x = \sqrt{50} \rightarrow x = 5\sqrt{2} = 7,07$

6. **Clasifica en rectángulos, acutángulos u obtusángulos los triángulos de lados:**

a) 5 m, 6 m y 7 m

b) 13 m, 15 m y 20 m

c) 45 m, 27 m y 36 m

d) 35 m, 28 m y 46 m

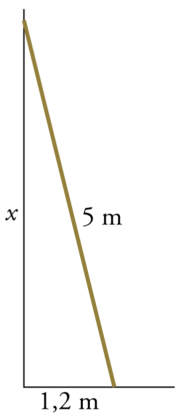
a) $5^2 + 6^2 = 61 > 49 = 7^2 \rightarrow$ Triángulo acutángulo

b) $13^2 + 15^2 = 394 < 400 = 20^2 \rightarrow$ Triángulo obtusángulo

c) $27^2 + 36^2 = 2\,025 = 45^2 \rightarrow$ Triángulo rectángulo

d) $28^2 + 35^2 = 2\,009 < 2\,116 = 46^2 \rightarrow$ Triángulo obtusángulo

7. **Una escalera de 5 m de largo está apoyada en la pared. Su extremo inferior está a 1,2 m de ella. ¿Qué altura alcanza su extremo superior?**

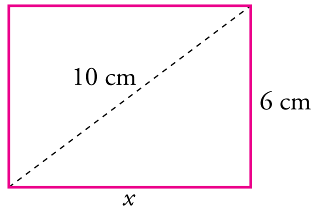


$5^2 = 1,2^2 + x^2 \rightarrow 25 = 1,44 + x^2 \rightarrow x^2 = 25 - 1,44$

$x = \sqrt{23,56} = 4,85$ m

Solución: El extremo superior alcanza una altura de 4,85 m.

8. La diagonal de un rectángulo mide 10 cm, y uno de los lados, 6 cm. Calcula su perímetro.

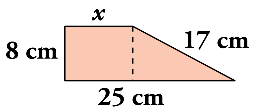


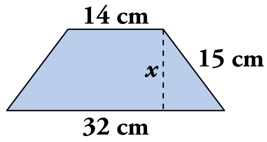
$10^2 = 6^2 + x^2 \to 100 = 36 + x^2 \to x^2 = 100 - 36$

$x = \sqrt{64} \to x = 8$ cm

$P = 2 \cdot 6 + 2 \cdot 8 = 12 + 16 = 28$ cm

9.

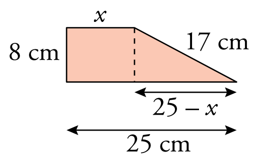




a) Calcula x en cada uno de estos trapecios.

b) Halla las longitudes de sus diagonales.

a)



$17^2 = 8^2 + (25 - x)^2$

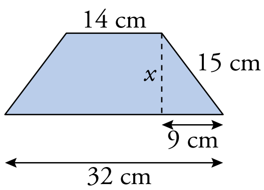
$289 = 64 + 625 - 50x + x^2$

$x^2 - 50x + 400 = 0$

$$x = \frac{-(-50) \pm \sqrt{(-50)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 400}}{2 \cdot 1} = \frac{50 \pm \sqrt{2\,500 - 1\,600}}{2} = \frac{50 \pm \sqrt{900}}{2} \begin{cases} \dfrac{50 + 30}{2} = 40 \text{ cm} \\ \dfrac{50 - 30}{2} = 10 \text{ cm} \end{cases}$$

$x = 40$ no vale porque es mayor que 25.

Solución: $x = 10$ cm.

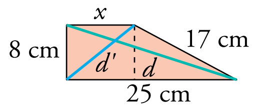


$15^2 = 9^2 + x^2 \to 225 = 81 + x^2 \to x^2 = 225 - 81$

$x = \sqrt{144} = 12$ cm

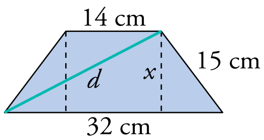
Solución: $x = 12$ cm.

b)



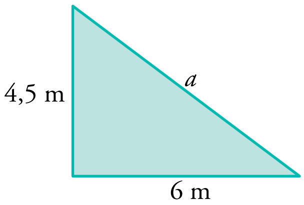
$d^2 = 8^2 + 25^2 = 689 \to d = \sqrt{689} = 26,2$ cm

$d'^2 = 8^2 + 10^2 = 164 \to d' = \sqrt{164} = 12,8$ cm



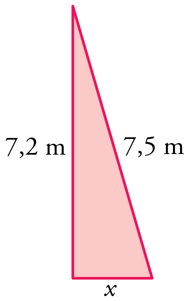
$d^2 = 23^2 + 12^2 = 673 \to d = \sqrt{673} = 25,9$ cm

10. **En un triángulo rectángulo, los catetos miden 4,5 m y 6 m. En otro triángulo rectángulo, un cateto mide 7,2 m, y la hipotenusa, 7,5 m. ¿Cuál de los dos tiene mayor perímetro?**



$a^2 = 6^2 + 4{,}5^2 \rightarrow a^2 = 36 + 20{,}25 \rightarrow a = \sqrt{56{,}25} = 7{,}5$ m

$P = 7{,}5 + 4{,}5 + 6 = 18$ m



$7{,}5^2 = 7{,}2^2 + x^2 \rightarrow 56{,}25 = 51{,}84 + x^2 \rightarrow x^2 = 56{,}25 - 51{,}84$

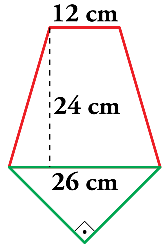
$x = \sqrt{4{,}41} = 2{,}1$ m

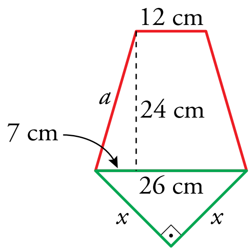
$P = 7{,}5 + 7{,}2 + 2{,}1 = 16{,}8$ m

Solución: El primer triángulo tiene mayor perímetro.

Página 152

11. **Este pentágono se ha formado haciendo coincidir la base mayor de un trapecio isósceles con la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles. Halla el perímetro del pentágono.**





$a^2 = 24^2 + 7^2 \rightarrow a^2 = 576 + 49 \rightarrow a = \sqrt{625} \rightarrow a = 25$ cm

$26^2 = x^2 + x^2 \rightarrow 676 = 2x^2 \rightarrow x^2 = 338 \rightarrow x = \sqrt{338} = 18,3$ cm

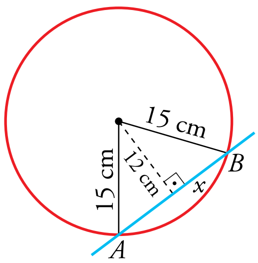
$P = 12 + 2 \cdot 25 + 2 \cdot 18,3 = 98,6$ cm

12. **En una circunferencia de 15 cm de radio, traza una cuerda AB a 12 cm del centro.**

a) ¿Cuál es la longitud de AB?

b) ¿Cuántas cuerdas de la misma longitud que AB hay en esa circunferencia? ¿Cuántas hay que sean paralelas a AB? ¿Cuántas hay paralelas y de la misma longitud que AB?

a)

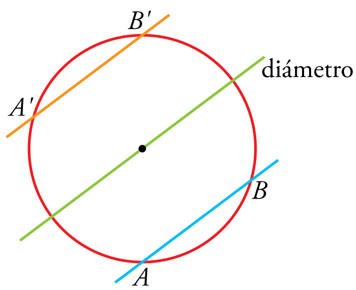


$15^2 = 12^2 + x^2 \rightarrow 225 = 144 + x^2 \rightarrow x^2 = 225 - 144$

$x = \sqrt{81} \rightarrow x = 9$ cm

$\overline{AB} = 2 \cdot 9 = 18$ cm

b)

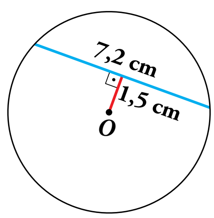


Hay infinitas cuerdas de la misma longitud que $\overline{AB}$.

Hay infinitas cuerdas paralelas a la cuerda $\overline{AB}$.

Sólo hay una cuerda, la simétrica con respecto del diámetro paralelo a $\overline{AB}$, que sea paralela y tenga la misma medida.

13. **Fíjate en esta circunferencia y responde a las siguientes preguntas:**



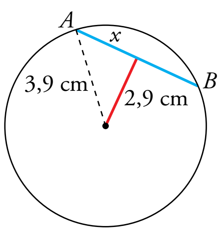
a) ¿Cuánto mide el radio?

b) ¿Cuál será la longitud de una cuerda cuya distancia al centro es 2,9 cm?

a) $r^2 = 1,5^2 + 3,6^2 \rightarrow r^2 = 2,25 + 12,96 \rightarrow r^2 = 15,21$

$r = \sqrt{15,21} \rightarrow r = 3,9$ cm

b)

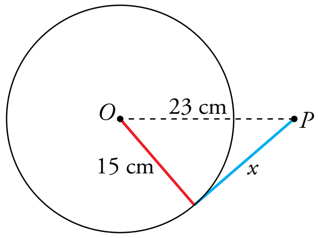


$3,9^2 = x^2 + 2,9^2 \rightarrow 15,21 = x^2 + 8,41 \rightarrow x^2 = 15,21 - 8,41$

$x = \sqrt{6,8} \rightarrow x = 2,6$ cm

$\overline{AB} = 2 \cdot 2,6 = 5,2$ cm

14. **Un punto P está a 23 cm de una circunferencia de 30 cm de diámetro. Calcula la longitud del segmento tangente desde P a la circunferencia.**



$23^2 = 15^2 + x^2 \rightarrow 529 = 225 + x^2 \rightarrow x^2 = 529 - 225$

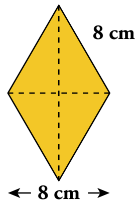
$x = \sqrt{304} \rightarrow x = 17{,}4$ cm

Solución: El segmento tangente mide 17,4 cm.

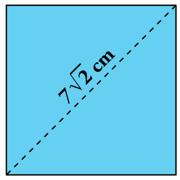
Áreas

15. **Halla el área de las figuras coloreadas:**

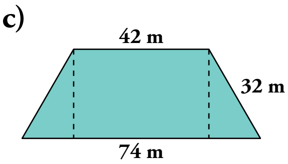
a)



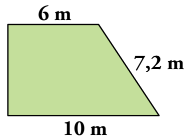
b)



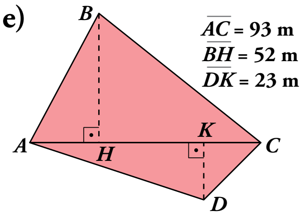
c)



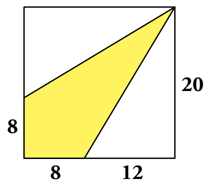
d)



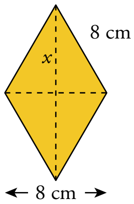
e)



f)



a)



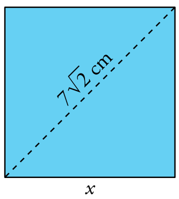
$8^2 = 4^2 + x^2 \rightarrow 64 = 16 + x^2 \rightarrow x^2 = 64 - 16$

$x = \sqrt{48} \rightarrow x = 4\sqrt{3}$ cm $\approx 6{,}9$ cm

$D = 2 \cdot 4\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$ cm $\approx 13{,}8$ cm

$\text{Área} = \dfrac{8 \cdot 8\sqrt{3}}{2} = 32\sqrt{3}\ \text{cm}^2 \approx 55{,}4\ \text{cm}^2$

b)

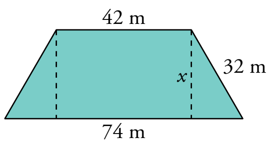


$x^2 + x^2 = \left(7\sqrt{2}\right)^2 \rightarrow 2x^2 = 2 \cdot 49 \rightarrow x^2 = 49$

$x = 7$ cm

$\text{Área} = 7^2 = 49\ \text{cm}^2$

c)

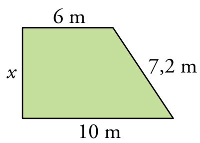


$32^2 = 16^2 + x^2 \rightarrow 1\,024 = 256 + x^2 \rightarrow x^2 = 768$

$x = \sqrt{768} \rightarrow x = 16\sqrt{3}$ m $\approx 27{,}71$ m

$\text{Área} = \dfrac{42 + 74}{2} \cdot 16\sqrt{3} = 928\sqrt{3}\ \text{m} \approx 1\,607{,}3\ \text{m}^2$

d)



$7{,}2^2 = 4^2 + x^2 \rightarrow 51{,}84 = 16 + x^2 \rightarrow x^2 = 35{,}84$

$x = \sqrt{35{,}84} \rightarrow x = 5{,}99$ m

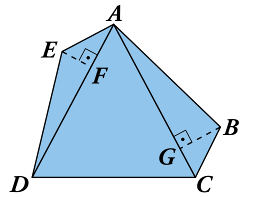
$\text{Área} = \dfrac{10 + 6}{2} \cdot 5{,}99 = 47{,}92\ \text{m}^2$

e) $\text{Área} = \dfrac{93 \cdot 52}{2} + \dfrac{93 \cdot 23}{2} = 2\,418 + 1\,069{,}5 = 3\,487{,}5\ \text{m}^2$

f) $A_{\text{CUADRADO}} = 20^2 = 400\ \text{u}^2$; $A_{\text{TRIÁNGULO}} = \dfrac{20 \cdot 12}{2} = 120\ \text{u}^2$; $\text{Área} = 400 - 2 \cdot 120 = 160\ \text{u}^2$

16. **Calcula el área de las figuras coloreadas:**

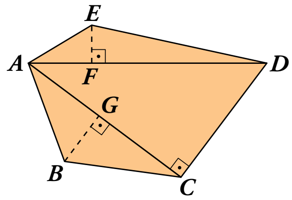
a)



$\overline{AD} = \overline{AC} = 17$ m $\quad \overline{DC} = 16$ m

$\overline{BG} = 4{,}5$ m $\quad \overline{EF} = 3{,}2$ m

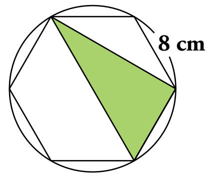
b)



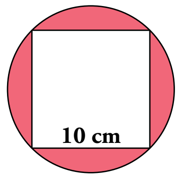
$\overline{BG} = 8{,}4$ m $\quad \overline{AC} = 28$ m

$\overline{CD} = 21$ m $\quad \overline{EF} = 5{,}6$ m

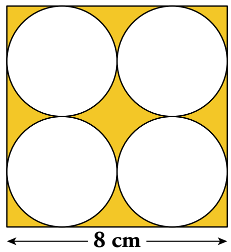
c)



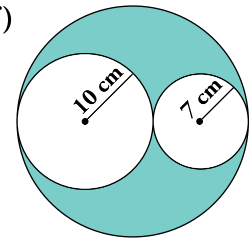
d)



e)



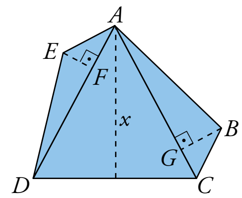
f)



a) $17^2 = x^2 + 8^2 \rightarrow 289 = x^2 + 64 \rightarrow x^2 = 225$

$x = \sqrt{225} \rightarrow x = 15$ m

Calculamos el área como suma de las áreas de los tres triángulos.

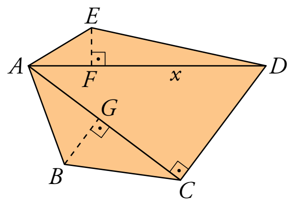


$$\text{Área} = \frac{3{,}2 \cdot 17}{2} + \frac{4{,}5 \cdot 17}{2} + \frac{15 \cdot 16}{2} = 27{,}2 + 38{,}25 + 120 = 185{,}45 \text{ m}^2$$

Área = 185 45 m^2

b) Calculamos el área como suma de las áres de los tres triángulos

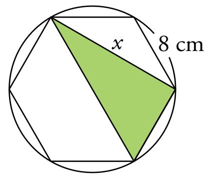
$x^2 = 28^2 + 21^2 \rightarrow x^2 = 1\,225 \rightarrow x = \sqrt{1\,225} \rightarrow x = 35$ m



$$\text{Área} = \frac{35 \cdot 5{,}6}{2} + \frac{8{,}4 \cdot 28}{2} + \frac{28 \cdot 21}{2} = 98 + 117{,}6 + 294 = 509{,}6 \text{ m}^2$$

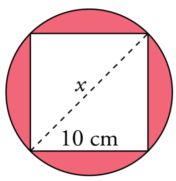
Área = 509,6 m^2

c) $16^2 = x^2 + 8^2 \rightarrow 256 = x^2 + 64 \rightarrow x^2 = 192 \rightarrow x = 8\sqrt{3} \approx 13{,}8$ cm



$$\text{Área} = \frac{8 \cdot 8\sqrt{3}}{2} = 32\sqrt{3} \approx 55{,}4 \text{ cm}^2$$

d) $x^2 = 10^2 + 10^2 \rightarrow x^2 = 200 \rightarrow x = 10\sqrt{2} \approx 14{,}1$ cm



$$r = \frac{10\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2} \text{ cm} \approx 7{,}07 \text{ cm}$$

$$\text{Área} = \pi \cdot \left(5\sqrt{2}\right)^2 - 10^2 = 50\pi - 100 = 57{,}1 \text{ cm}^2$$

e) Área del cuadrado $= 8^2 = 64$ cm^2

Área del círculo $= \pi \cdot 2^2 = 4\pi$ cm$^2 \approx 12{,}56$ cm^2

Área $= 64 - 4 \cdot 4\pi = 64 - 16\pi = 13{,}73$ cm^2

f) Área círculo grande $= \pi \cdot 17^2 = 289\pi$ cm$^2 \approx 907{,}9$ cm^2

Área círculo mediano $= \pi \cdot 10^2 = 100\pi$ cm$^2 \approx 314{,}2$ cm^2

Área círculo pequeño $= \pi \cdot 7^2 = 49\pi$ cm$^2 \approx 153{,}9$ cm^2

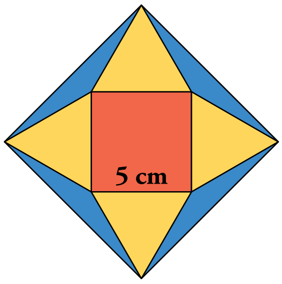
Área total $= 289\pi - (100\pi + 49\pi) = 140\pi \approx 439{,}8$ cm^2

17. **Calcula:**

a) La superficie de la zona coloreada de rojo.

b) La superficie de la zona coloreada de amarillo.

c) La superficie de la zona coloreada de azul.



a) Área zona roja = $5^2 = 25 \text{ cm}^2$

b) $x^2 + 2{,}5^2 = 5^2 \rightarrow x^2 = 25 - 6{,}25 \rightarrow x^2 = 18{,}75 \rightarrow x = 4{,}3$ cm

Área de un triángulo = $\dfrac{5 \cdot 4{,}3}{2} = 10{,}75 \text{ cm}^2$

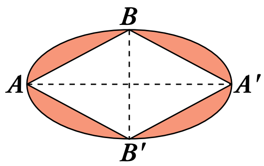
Área zona amarilla = $4 \cdot 10{,}75 = 43 \text{ cm}^2$

c) Calculamos las diagonales: $5 + 2 \cdot 4{,}3 = 13{,}6$ cm

Área cuadrado grande = $\dfrac{13{,}6 \cdot \dfrac{13{,}6}{2}}{2} \cdot 2 = \dfrac{13{,}6 \cdot 13{,}6}{2} = 92{,}48 \text{ cm}^2$

Área zona azul = $92{,}48 - (25 + 43) = 24{,}48 \text{ cm}^2$

18. **Las diagonales del rombo inscrito en la elipse miden 16 cm y 30 cm. Halla el área de la parte coloreada.**



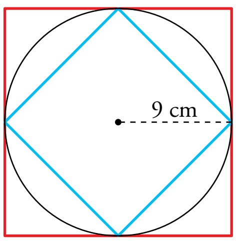
Área de la elipse = $\pi \cdot 8 \cdot 15 = 120\pi \text{ cm}^2 \approx 377 \text{ cm}^2$

Área del rombo = $\dfrac{16 \cdot 30}{2} = 240 \text{ cm}^2$

Área total = $120\pi - 240 = 136{,}9 \text{ cm}^2$

19. **En una circunferencia de 56,52 cm de longitud, dibuja el cuadrado circunscrito y el cuadrado inscrito. Calcula el área y el perímetro de cada cuadrado (toma $\pi = 3{,}14$).**

Calculamos el radio: $56{,}52 = 2\pi \cdot r \rightarrow r = \dfrac{56{,}52}{2\pi} \rightarrow r = 9$ cm



Área cuadrado circunscrito = $18^2 = 324 \text{ cm}^2$

Perímetro cuadrado circunscrito = $4 \cdot 18 = 72$ cm

Calculamos el lado del cuadrado inscrito:

$x^2 = 9^2 + 9^2 \rightarrow x^2 = 81 + 81 \rightarrow x^2 = 162 \rightarrow x = \sqrt{162} = 9\sqrt{2} \approx 12{,}7$ cm

Área cuadrado inscrito = $\left(9\sqrt{2}\right)^2 = 162 \text{ cm}^2$

Perímetro cuadrado inscrito = $4 \cdot 9\sqrt{2} = 36\sqrt{2} \approx 50{,}9$ cm

20. **Halla, en cada caso, el área y el perímetro de un sector circular de un círculo de 15 cm de radio y cuya amplitud es:**

a) 90° **b) 120°** **c) 72°** **d) 153°**

a) Área $= \dfrac{\pi \cdot 15^2 \cdot 90°}{360°} = 176,7 \text{ cm}^2$

Perímetro $= \dfrac{2\pi \cdot 15 \cdot 90°}{360°} + 2 \cdot 15 = 53,5 \text{ cm}$

b) Área $= \dfrac{\pi \cdot 15^2 \cdot 120°}{360°} = 235,6 \text{ cm}^2$

Perímetro $= \dfrac{2\pi \cdot 15 \cdot 120°}{360°} + 2 \cdot 15 = 61,4 \text{ cm}$

c) Área $= \dfrac{\pi \cdot 15^2 \cdot 72°}{360°} = 141,4 \text{ cm}^2$

Perímetro $= \dfrac{2\pi \cdot 15 \cdot 72°}{360°} + 2 \cdot 15 = 48,8 \text{ cm}$

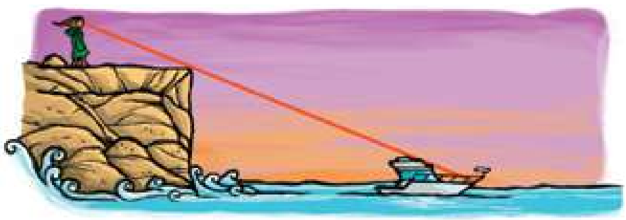
d) Área $= \dfrac{\pi \cdot 15^2 \cdot 153°}{360°} = 300,4 \text{ cm}^2$

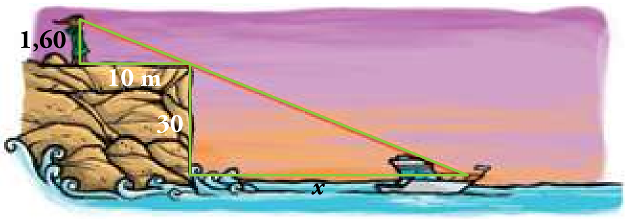
Perímetro $= \dfrac{2\pi \cdot 15 \cdot 153°}{360°} + 2 \cdot 15 = 70,1 \text{ cm}$

Página 153

Piensa y resuelve

21. **Maribel mide 1,60 m de altura y se encuentra sobre un acantilado, a 30 m sobre el nivel del mar. Ve una barca que navega a cierta distancia de la costa y comprueba que, si se aleja más de 10 metros del borde, hacia el interior, deja de ver la barca. ¿A qué distancia se encuentra la embarcación de la base del acantilado?**





Son triángulos semejantes:

$$\frac{30}{1,6} = \frac{x}{10} \rightarrow x = \frac{30 \cdot 10}{1,6} \rightarrow x = 187,5 \text{ m}$$

Solución: La embarcación se encuentra a 187,5 m de la base del acantilado.

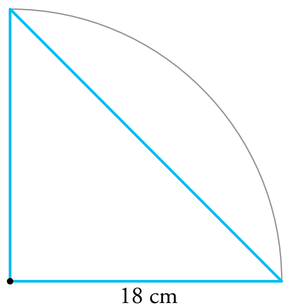
22. **Ejercicio resuelto en el libro del alumno.**

23. **Calcula el área de un segmento circular de 90° de amplitud en un círculo de 18 cm de radio.**

$$A_{\text{SECTOR CIRCULAR}} = \frac{\pi \cdot 18^2 \cdot 90°}{360°} = 254,5 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{TRIÁNGULO}} = \frac{18 \cdot 18}{2} = 162 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{SEGMENTO CIRCULAR}} = 254,5 - 162 = 92,5 \text{ cm}^2$$

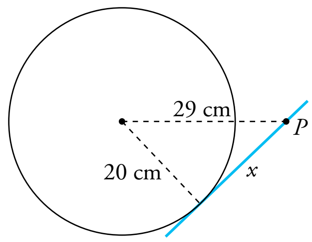


24. **a) Desde un punto P que dista 29 cm del centro de una circunferencia de radio 20 cm, se traza una tangente. Calcula la distancia de P al punto de tangencia.**

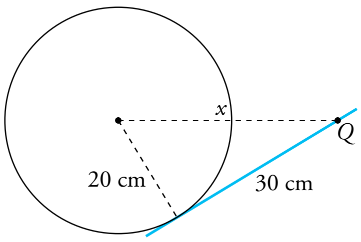
b) Trazamos otra tangente desde otro punto Q, y al medir la distancia de Q al punto de tangencia obtenemos 30 cm. ¿Cuál es la distancia de Q al centro de la circunferencia?

a) $29^2 = 20^2 + x^2 \rightarrow 841 = 400 + x^2 \rightarrow x^2 = 441 \rightarrow$

$\rightarrow x = \sqrt{441} \rightarrow x = 21$ cm



b)

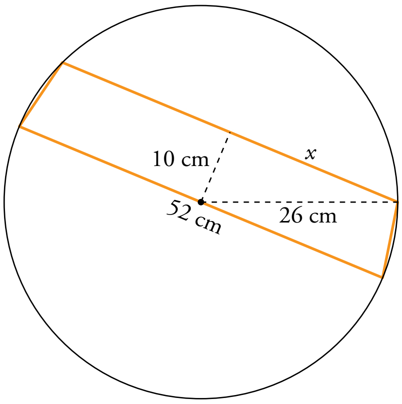


$x^2 = 20^2 + 30^2 \rightarrow x^2 = 400 + 900 \rightarrow$

$\rightarrow x^2 = 1\,500 \rightarrow x = \sqrt{1\,500} \rightarrow$

$\rightarrow x = 38,7$ cm

25. **En un círculo de 52 cm de diámetro se traza una cuerda a 10 cm del centro. Halla el área del cuadrilátero que se forma uniendo los extremos de la cuerda con los del diámetro paralelo a ella.**



$26^2 = 10^2 + x^2 \rightarrow 676 = 100 + x^2 \rightarrow x^2 = 576 \rightarrow$

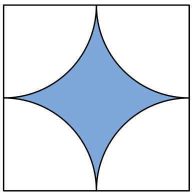
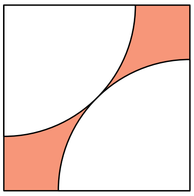
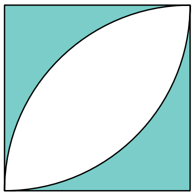
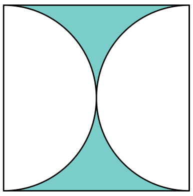
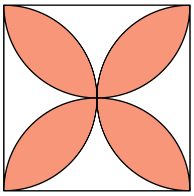
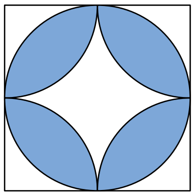
$\rightarrow x = \sqrt{576} \rightarrow x = 24$ cm

La base menor mide $24 \cdot 2 = 48$ cm

$\text{Área} = \dfrac{48 + 52}{2} \cdot 10 = 500 \text{ cm}^2$

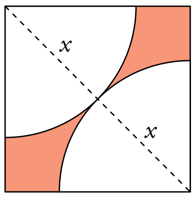
Solución: El área del cuadrilátero es de 500 cm^2.

26. **Calcula el área de la parte coloreada de cada uno de estos cuadrados de 8 cm de lado:**

a) 
b) 
c) 
d) 
e) 
f) 

a) $\text{Área} = 8^2 - \pi \cdot 4^2 = 13{,}7 \text{ cm}^2$

b) $(2x)^2 = 8^2 + 8^2 \rightarrow 4x^2 = 128 \rightarrow x^2 = 32 \rightarrow x = 4\sqrt{2} \approx 5{,}7$ cm



$\text{Área cuadrado} = 8^2 = 64 \text{ cm}^2$

$\text{Área semicírculo} = \dfrac{1}{2}\pi \cdot \left(4\sqrt{2}\right)^2 = 16\pi \approx 50{,}3 \text{ cm}^2$

$\text{Área} = 64 - 50{,}3 = 13{,}7 \text{ cm}^2$

c) $\text{Área de un trozo azul} = 8^2 - \dfrac{1}{4}\pi \cdot 8^2 = 64 - 16\pi = 13{,}7 \text{ cm}^2$

$\text{Área zona azul} = 2 \cdot 13{,}7 = 27{,}4 \text{ cm}^2$

d) $\text{Área} = 8^2 - \pi \cdot 4^2 = 64 - 16\pi = 13{,}7 \text{ cm}^2$

e) Es el área del cuadrado restándole dos veces el área calculado en d)

$\text{Área} = 8^2 - 2 \cdot 13{,}7 = 64 - 27{,}4 = 36{,}6 \text{ cm}^2$

f) El área es igual al del apartado e). Son los mismo pétalos pero girados.

$\text{Área} = 36{,}6 \text{ cm}^2$